中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

Ch1 函数逼近

① 插值

· 多项式插值定理：若结点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 两两不同，则 $\exists 1$ 次数 $\leq n$ 多项式 p_n s.t. $p_n(x_i)=y_i$.

△插值误差定理：$f\in C^{n+1}[a,b]$，$p\in\Pi_n$ 为 f 在不同结点 $x_0\cdots x_n$ 插值多项式.

则 $\forall x\in[a,b]$. $\exists\, \xi_x\in(a,b)$ s.t. $f(x)-p(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

· Lagrange 插值 注：当 $f\in\Pi_n$ 时 $f=L_n$. 特别的，$f=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} l_k(x)=1$.

基函数：$l_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$. Lagrange 插值多项式：$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$. $(y_k=f(x_k))$

优：同一组结点，多组 $\{y_i\}$ 易插 缺：无承袭性（每增一节点均重算基）

· Newton 插值

$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)\cdots(x-x_n)$.

承袭性：$N_{n+1}(x)=N_n(x)+q_{n+1}(x)$. 即增加一个节点 x_{n+1} 时，仅需新增一项 $q_{n+1}=a_{n+1}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

系数 $a_n=f[x_0\cdots x_n]$ … n 阶差商. 其定义为：$f[x_0\cdots x_k]=\begin{cases}\dfrac{f[x_1\cdots x_k]-f[x_0\cdots x_{k-1}]}{x_k-x_0} & x_k\neq x_0\\ \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} & x_k=x_0\end{cases}$

差商的计算——差商表

0阶	1阶	2阶	3阶
$f(x_0)$			
$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

Newton 插值可以推广至带重结点情形（m重结点给出 $0\sim(m-1)$ 阶导数）

此时，依旧有 Newton 形式：$p(x)=\sum_{j=0}^{n} f[x_0\cdots x_j]\prod_{i=0}^{j-1}(x-x_i)$.（同样也可差商表下三角形式算）

附：差商性质（对称性；$f[x_0,x_0\cdots x_n]=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)$；$f[x_0\cdots x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_n)}$）详见 1.2 P10.

· Hermite 插值：给定 f 在 $x_0\sim x_n$ 的函数及1阶导数，求 $\le 2n+1$ 次插值 φ.

设 $\varphi(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)h_i(x)+\sum_{i=0}^{n} g_i(x)f'(x_i)$，并令 $\begin{cases} h_i(x_j)=\delta_{ij} \\ h_i'(x_j)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} g_i'(x_j)=\delta_{ij} \\ g_i(x_j)=0 \end{cases}$

$l_i'(x_i)=\sum_{k\ne i}\frac{1}{x_i-x_k}$

可定义 $h_i(x)=(1-2(x-x_i)\underline{l_i'(x_i)})\,l_i^2(x)$，$g_i(x)=(x-x_i)\,l_i^2(x)$.

Hermite 插值误差估计：$\cdots\; f(x)-p(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$.

推广：给定 $x_0\sim x_n$，满足 $p^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)\ (i=0\sim n;\ j=0\sim k_i-1)$ 的 $\le m=k_0+\cdots+k_n-1$ 次多项式 $\exists$ 1.

· Tchebyshev 多项式（第一类）与最佳结点

（收敛性）附：Faber's 定理——任意结点组 $\{x_i\}$ 上总 $\exists$ 一个连续的 f，其插值多项式

线性正算子 $\begin{cases} L(\alpha f+\beta g)=\alpha Lf+\beta Lg \\ f\ge 0\Rightarrow Lf\ge 0 \end{cases}$，Bernstein 多项式 $B_nf(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(\frac{k}{n})x^k(1-x)^{n-k}$，B-K 定理 若 L_n 正，则 $\|L_nf-f\|_\infty\to 0$ 只需看 $f=1,x,x^2$ 即可

Tchebyshev 多项式的两种等价定义 $\begin{cases} 1.\ \text{递归：} T_0=1,\ T_1=x,\ T_{n+1}=2xT_n-T_{n-1}. \\ 2.\ \text{解析：} T_n(x)=\cos(n\arccos x). \end{cases}$

性质：$|T_n(x)|\le 1$；$T_n(\cos\frac{j\pi}{n})=(-1)^j$，$T_n(\cos\frac{(2j-1)}{2n}\pi)=0$；$2^{1-n}T_n$ 为首一.

首一多项式定理：设 p 为 n 次首一，则 $\max_{-1\le x\le 1}|p(x)|\ge 2^{1-n}$.（可见 $p=2^{1-n}T_n$ 时 $\|p\|_\infty$ 最小）

由插值误差定理，结点取为 T_{n+1} 的根，此时 $|f(x)-p(x)|\le\frac{1}{2^n(n+1)!}\max_{|t|\le 1}|f^{(n+1)}(t)|$.

注：1° Tchebyshev 结点圆上"等距" 2° 等距节点插值高次下产生 Runge 现象（不稳定）

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

· 样条(分段多项式)插值

奇数次 $(2m+1)$ 自然样条:（常用3次） $S\in C^{2m}(\mathbb{R})$，在 $[t_i,t_{i+1}]$ 内为 $\le 2m+1$ 次多项式，

$(-\infty,t_0]$ 与 $[t_n,+\infty)$ 内为 $\deg\le m$ 多项式，记给定结点 $\{t_i\}_{i=0}^n$ 上 $(2m+1)$ 次自然—全体构成的线性空间

注：$x_+^n=\begin{cases}x^n & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ ——截断幂

表示(thm)：$\forall S\in N_n^{2m+1}(t_0\sim t_n)$，$S(x)=\sum_{i=0}^m a_i x^i+\sum_{i=0}^n b_i(x-t_i)_+^{2m+1}$，其中 $\sum_{i=0}^n b_i t_i^j=0\ (0\le j\le m)$

∃1性(thm)：$\forall\{t_i\}_{i=0}^n$ 结点及其上给定 $\{y_i\}_{i=0}^n$，$0\le m\le n$，∃1 $(2m+1)$ 次自然样条在结点上取给定值。

总曲率最优性(thm)：$m\le n$，$f\in C^{m+1}[a,b]$，S 为 $\{t_i\}_{i=0}^n$ 上插值 f 的 $(2m+1)$ 次自然样条，

则 $\int_a^b (S^{(m+1)}(x))^2dx\le\int_a^b(f^{(m+1)}(x))^2dx$.

② 拟合 $\min\limits_{\varphi\in\Phi} R_2=\sqrt{\sum_{i=0}^m(\varphi(x_i)-f(x_i))^2}$.

注：最简单的就是线性拟合(最小二乘)

$\|Ax-b\|_h=\min\limits_{y\in\mathbb{R}^n}\|Ay-b\|_h \iff A^TAx=A^Tb$

· $\Phi=\mathrm{span}\{\varphi_1\cdots\varphi_n\}$（有限维），即求 $\min\limits_{a_1\cdots a_n\in K}\|f-(a_1\varphi_1+\cdots+a_n\varphi_n)\|$.

$\Longrightarrow$ 法方程 $A\vec{a}=b$，其中 $A=(\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle_h)$，$b=(\langle f,\varphi_i\rangle_h)$ $\Rightarrow\vec{a}^*$，即有 $\varphi=\sum_{i=1}^n a_i^*\varphi_i$

（如：$p_0=1$，$p_1=x-a_1$，$p_n=(x-a_n)p_{n-1}-b_n p_{n-2}$，$a_n=\frac{\langle xp_{n-1},p_{n-1}\rangle}{\langle p_{n-1},p_{n-1}\rangle}$，$b_n=\frac{\langle p_{n-1},p_{n-1}\rangle}{\langle p_{n-2},p_{n-2}\rangle}$ 为正交多项式序列，不同内积下不同表示）

· 一般函数空间的逼近
- 内积空间：正交多项式（注：上述 p_n 为首一中范数最小者）、最佳逼近 → 正交投影
- 连续函数空间：（偏差点概念及thm）定理：$[-1,1]$ 所有首一 n 次中，$w(x)=2^{1-n}T_n$ 与0偏差 $\min=2^{1-n}$

注：对实际 f，可采用作图分析等，灵活求最佳逼近（见1.4 $P_{37}\sim P_{38}$）